

УДК 531.36:534.1:62-755

Олег А. Горошко, Геннадій Б. Філімоніхін

Зрівноваження ротора, що здійснює плоскопаралельний рух, абсолютно твердим тілом, яке обертається навколо повздовжньої і поперечної осей ротора

Досліджена стійкість усталених рухів ротора, що зрівноважується абсолютно твердим тілом. Ротор здійснює плоскопаралельні рухи, розташований вертикально, і тверде тіло може повертатися навколо повздовжньої і поперечної осей ротора. У випадку, коли маса твердого тіла набагато менша маси ротора, установлено, що на зарезонансних швидкостях обертання ротора єдиний стійкий - основний усталений рух, у якому ротор найбільше зрівноважений і центр мас твердого тіла нижче нерухомої точки.

Ключові слова: зрівноваження ротора, автобалансири, пасивні автобалансири.

Для зрівноваження на ходу роторів, що швидко обертаються, застосовуються пасивні автобалансири. У них на закритичних швидкостях обертання ротора рухомі маси з часом самі приходять у положення, у якому зрівноважують ротор і при незмінному дисбалансі і швидкості обертання ротора рухаються з ним як одне ціле. У класичних автобалансирах (кільцевих, маятникових і кульових) рухомі маси рухаються в площинах, перпендикулярних повздовжній осі ротора [1]. У даній роботі досліджується динаміка нового автобалансира, у якому рухома маса у виді абсолютно твердого тіла (АТТ) може повертатися усередині полого ротора навколо його повздовжньої і поперечної осей. У системи ротор - автобалансир існують декілька істотно відмінних усталених рухів. У так званих основних - ротор зрівноважений, а в побічних - розбалансований. Тому при дослідженні динаміки нового автобалансира досліджується стійкість основних і побічних усталених рухів.

1. АТТ із нерухомою точкою на осі вала ротора може зрівноважити ротор в одній площині корекції при виконанні наступних умов відносно головних осей x_1, x_2, x_3 , що виходять із точки підвісу [2, 3]:

$$I_1=A, I_2=I_3=B, \mathbf{l}=(0,0,-l)^T. \quad (1)$$

Тут: I_1, I_2, I_3 - осьові моменти інерції АТТ; \mathbf{l} - радіус-вектор центра мас АТТ відносно точки підвісу; t - знак транспонування. В даній роботі припускається, що АТТ, що задовольняє цим умовам, має відносно ротора два ступені вільності: може повертатися на кут ψ навколо повздовжньої осі ротора; і на кут ϕ навколо поперечної осі (рис. 1). При поворотах АТТ навколо власних осей обертання виникають моменти в'язкого опору $-H_1\dot{\phi}$, $-H_2\dot{\psi}$, де H_1, H_2 - коефіцієнти в'язкого тертя. Ротор розташований вертикально, рухається плоскопаралельно, причому площина руху горизонтальна. Його утримують ізотропні в'язкопружні опори. Для опису руху ротора викорис-

товуємо осі $Oxyz$, що обертаються разом із ротором із сталою швидкістю ω , причому вісь z збігається з віссю обертання, і точка O знаходиться на рівні точки підвісу АТТ. Допоміжні осі $Kuvw$ жорстко зв'язані з ротором і паралельні осям $Oxyz$, причому вісь w збігається з віссю вала ротора, і при відсутності відхилення вала від осі обертання точки K і O співпадають. Відносно осей $Kuvw$ центр мас ротора має координати $(e \cos \gamma, e \sin \gamma, 0)$, де e - ексцентриситет, γ - кут, що визначає напрям вектора дисбалансу.

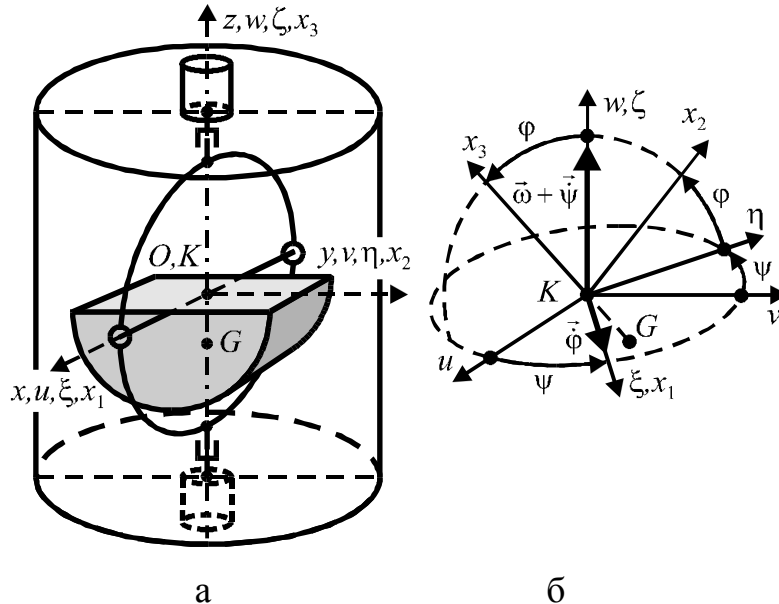


Рис. 1

В процесі руху вал відхиляється від осі обертання на $\mathbf{r} = \mathbf{OK}$ і на нього починають діяти поновлююча сила $-\mathbf{cr}$ і сила в'язкого опору $-H_3 \mathbf{v}$, де c - жорсткість, H_3 - коефіцієнт в'язкого опору опор, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ - абсолютна швидкість осі вала ротора (точки K). Для опису руху АТТ використовуємо

осі $K\xi\eta\zeta$, що виходять із точки підвісу АТТ і утворюються з осями $Kuvw$

після першого повороту АТТ навколо осі w на кут ψ . Осі $Kx_1x_2x_3$ жорстко зв'язані з АТТ, утворюються з осями $K\xi\eta\zeta$ поворотом навколо осі $\xi = x_1$ на кут ϕ , і показують на рис. 1, б положення АТТ після двох поворотів.

Для складання рівнянь динаміки АТТ використана теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної системи. За рухомі осі прийняті $K\xi\eta\zeta$. Тоді теорема має вид [4]:

$$\frac{d'\mathbf{L}_K}{dt} + \vec{\omega}_{\xi\eta\zeta} \times \mathbf{L}_K + \mathbf{l}_G \times m\mathbf{a}_K = \mathbf{M}_K^{(e)}, \quad \mathbf{L}_K = \vec{\omega} \tilde{\mathbf{I}}, \quad (2)$$

де: \mathbf{L}_K - момент кількості руху АТТ відносно точки підвісу, $d'\mathbf{L}_K/dt$ - його похідна в рухомій системі координат $K\xi\eta\zeta$; $\vec{\omega}$ - абсолютна швидкість обертання АТТ; $\vec{\omega}_{\xi\eta\zeta}$ - кутова швидкість обертання рухомих осей $K\xi\eta\zeta$; $\mathbf{M}_K^{(e)}$ - головний момент зовнішніх сил, що діють на АТТ, знайдений відносно точки K ; \mathbf{a} - абсолютне прискорення точки підвісу АТТ; m - маса АТТ, $\tilde{\mathbf{I}}$ - його тензор інерції відносно точки K .

Для складання рівнянь динаміки ротора відносно рухомих осей $Oxyz$ використана теорема про рух центра мас матеріальної системи у виді

$$M_\Sigma \left[\frac{d'^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} + \vec{\varepsilon}_{xyz} \times \mathbf{r}_C + \vec{\omega}_{xyz} \times (\vec{\omega}_{xyz} \times \mathbf{r}_C) + 2\vec{\omega}_{xyz} \times \frac{d'\mathbf{r}_C}{dt} \right] = \mathbf{R}^{(e)}, \quad (3)$$

де: $M_{\Sigma}=M+m$ - маса системи; \mathbf{r} - радіус-вектор центра мас системи, $d'\mathbf{r}/dt$, $d''\mathbf{r}/dt^2$ - його перша і друга похідні відносно осей $Oxyz$; $\vec{\omega}_{xyz}$, $\vec{\epsilon}_{xyz}$ - кутові швидкість і прискорення обертання осей $Oxyz$; $\mathbf{R}^{(e)}$ - головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему.

Рівняння динаміки системи мають вид:

$$\begin{aligned} A\ddot{\phi} + H_1\dot{\phi} + mgl \sin \phi - \\ - ml[(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) \sin \psi - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) \cos \psi] \cos \phi = 0, \\ B\ddot{\psi} + H_2\dot{\psi} - ml[(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) \cos \psi + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) \sin \psi] \sin \phi = 0. \\ M_{\Sigma}(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) + H_3(\dot{x} - \omega y) + cx - ml [\ddot{\phi} \sin \psi + 2\dot{\phi}(\omega + \dot{\psi}) \cos \psi] \cos \phi + \\ + [\ddot{\psi} \cos \psi - (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\omega\dot{\psi}) \sin \psi] \sin \phi - \left(\sin \phi \sin \psi - \frac{Me}{ml} \cos \gamma \right) \omega^2 = 0, \\ M_{\Sigma}(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) + H_3(\dot{y} + \omega x) + cy + ml [\ddot{\phi} \cos \psi - 2\dot{\phi}(\omega + \dot{\psi}) \sin \psi] \cos \phi - \\ - [\ddot{\psi} \sin \psi + (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\omega\dot{\psi}) \cos \psi] \sin \phi - \left(\sin \phi \cos \psi - \frac{Me}{ml} \sin \gamma \right) \omega^2 = 0, \quad (4) \end{aligned}$$

де x , y - координати точки K відносно осей $Oxyz$. Таким чином, динаміку системи визначають тринадцять параметрів.

2. Для виділення істотно відмінних параметрів приведемо систему до безрозмірного виду. Вводимо параметри:

$$\omega_0 = \sqrt{c/M_{\Sigma}}, \quad \rho_1 = \sqrt{A/m}, \quad \rho_2 = \sqrt{B/m}, \quad e_0 = Me/ml, \quad (5)$$

де: ω_0 - резонансна частота - частота власних коливань ротора при нерухомому відносно ротора АТТ, відсутності обертання ротора і не врахуванні сил опору; $\rho_{1/2}$ - осьові радіуси інерції АТТ; e_0 - безрозмірний дисбаланс. Вводимо безрозмірні змінні:

$$\xi = \frac{x l}{\rho_1^2}, \quad \eta = \frac{y l}{\rho_1^2}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \left(\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau} \right). \quad (6)$$

Вводимо безрозмірні параметри:

$$\begin{aligned} R_m = \frac{ml^2}{M_{\Sigma}\rho_1^2}, \quad R_{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad R_g = \frac{gl}{\rho_1^2\omega_0^2}, \quad R_{\rho} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad h_{1/2} = \frac{H_{1/2}}{m\rho_{1/2}^2\omega_0}, \quad H = \frac{H_3}{M_{\Sigma}\omega_0}, \\ u_0 = e_0 \cos \gamma, \quad v_0 = e_0 \sin \gamma. \quad (7) \end{aligned}$$

Після перетворень рівняння динаміки (4) приймуть наступний безрозмірний вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + h_1\dot{\phi} + R_g^2 \sin \phi - [(\ddot{\xi} - 2R_{\omega}\dot{\eta} - R_{\omega}^2\xi) \sin \psi - (\ddot{\eta} + 2R_{\omega}\dot{\xi} - R_{\omega}^2\eta) \cos \psi] \cos \phi = 0, \\ (\ddot{\psi} + h_2\dot{\psi}) R_{\rho}^2 - [(\ddot{\xi} - 2R_{\omega}\dot{\eta} - R_{\omega}^2\xi) \cos \psi + (\ddot{\eta} + 2R_{\omega}\dot{\xi} - R_{\omega}^2\eta) \sin \psi] \sin \phi = 0, \\ \ddot{\xi} - 2R_{\omega}\dot{\eta} - R_{\omega}^2\xi + H(\dot{\xi} - R_{\omega}\eta) + \xi - R_m [\ddot{\phi} \sin \psi + 2(R_{\omega} + \dot{\psi})\dot{\phi} \cos \psi] \cos \phi + \\ + [\ddot{\psi} \cos \psi - (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2R_{\omega}\dot{\psi}) \sin \psi] \sin \phi + R_{\omega}^2(u_0 - \sin \phi \sin \psi) = 0, \\ \ddot{\eta} + 2R_{\omega}\dot{\xi} - R_{\omega}^2\eta + H(\dot{\eta} + R_{\omega}\xi) + \eta - R_m [\ddot{\phi} \cos \psi - 2(R_{\omega} + \dot{\psi})\dot{\phi} \sin \psi] \cos \phi - \\ - [\ddot{\psi} \sin \psi + 2(R_{\omega} + \dot{\psi})\dot{\phi} \cos \psi] \sin \phi + R_{\omega}^2(v_0 + \sin \phi \cos \psi) = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Тут точка над змінною означає вже похідну по τ , а не по t . Таким чином, динаміку системи визначають дев'ять безрозмірних параметрів, визначених у (7).

3. Рівняння усталених рухів мають вид

$$\begin{aligned} s_1 &= (\tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi}) R_{\omega}^2 \cos \tilde{\varphi} + R_g^2 \sin \tilde{\varphi} = 0, \\ s_2 &= (\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi}) R_{\omega}^2 \sin \tilde{\varphi} = 0, \\ s_3 &= (R_{\omega}^2 - 1) \tilde{\xi} + H R_{\omega} \tilde{\eta} + R_m R_{\omega}^2 (u_0 - \sin \tilde{\varphi} \sin \tilde{\psi}), \\ s_4 &= -H R_{\omega} \tilde{\xi} + (R_{\omega}^2 - 1) \tilde{\eta} + R_m R_{\omega}^2 (v_0 + \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\psi}), \end{aligned} \quad (9)$$

де $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ - сталі значення змінних, що визначають положення системи. З перших двох рівнянь у (9) видно, що усталені рухи діляться на дві групи, що задовольняють відповідно умовам:

$$\sin \tilde{\varphi} \neq 0, \quad \tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi} = 0; \quad (10)$$

$$\sin \tilde{\varphi} = 0, \quad \tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi} = 0. \quad (11)$$

В усталених рухах першої групи центр мас АТТ не на повздовжній осі ротора, а в усталених рухах другої групи - навпаки.

Припускаючи, що ємності АТТ вистачає для зрівноваження ротора, вводимо кут:

$$\varphi_0 = \arcsin(e_0), \quad e_0 < 1. \quad (12)$$

У цьому випадку у системи не більш шести істотно відмінних усталених рухів - два основних і чотири побічних. Усталені рухи будемо розрізняти по граничним по відношенню до ротора положенням, до яких прямує АТТ при необмеженому зростанні кутової швидкості обертання ротора (при $|R_{\omega}| \rightarrow \infty$). Усталені рухи і відповідні граничні положення АТТ наступні (рис. 2):

- $\tilde{\varphi}_1 \sim \varphi_0$ - основний рух, у якому центр мас АТТ нижче точки підвісу;
- $\tilde{\varphi}_2 \sim \pi - \varphi_0$ - основний рух, у якому центр мас АТТ вище точки підвісу;
- $\tilde{\varphi}_3 \sim -\pi/2$ - побічний рух, у якому АТТ відхилено у важкий бік ротора;
- $\tilde{\varphi}_4 \sim \pi/2$ - побічний рух, у якому

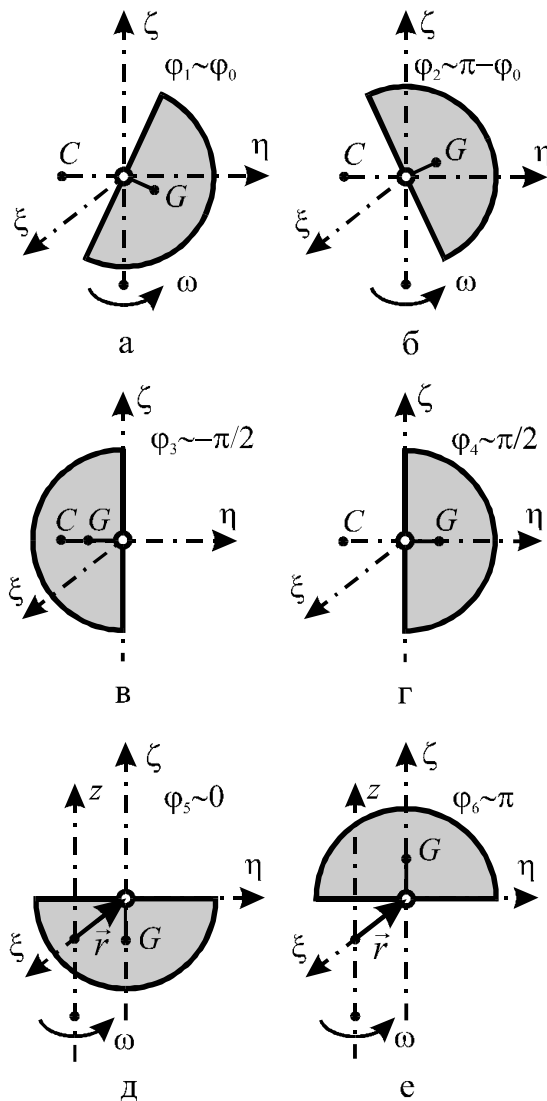


Рис. 2

АТТ відхилено в легкий бік ротора;

- $\tilde{\varphi}_5 \sim 0$ - побічний рух, у якому центр мас АТТ під точкою підвісу;
- $\tilde{\varphi}_6 \sim \pi$ - побічний рух, у якому центр мас АТТ над точкою підвісу.

Реальні положення АТТ відрізняються від граничних і в деяких діапазонах швидкостей усталені рухи $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_4$, не існують. Тому будь-який усталений рух будемо розрізняти по тому, аналогом якого граничного положення він є. Істотно, що:

- на дорезонансних швидкостях ($|R_\omega| < 1$) $\tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_4 < \pi/2$ - центр мас АТТ нижче точки підвісу;
- на зарезонансних швидкостях ($|R_\omega| > 1$) $\tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_4 > \pi/2$ - центр мас АТТ вище точки підвісу.
- на малих швидкостях обертання ротора ($|R_\omega| \sim 0$) існують тільки усталені рухи φ_2, φ_3 .

4. Досліджуємо стійкість усталених рухів.

4.1. Для усталених рухів першої групи введемо збурений рух

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \alpha, \quad \psi = \tilde{\psi} + \beta, \quad \xi = -\frac{R_g^2}{R_\omega^2} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \sin \tilde{\psi} + u, \quad \eta = \frac{R_g^2}{R_\omega^2} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \cos \tilde{\psi} + v, \quad (13)$$

де α, β, u, v - відхилення від незбуреного руху. Тоді рівняння першого наближення приймуть вид:

$$\begin{aligned} l_1 &= \ddot{\alpha} + h_1 \dot{\alpha} + R_g^2 \frac{1}{\cos \tilde{\varphi}} \alpha - \\ &\quad - [(\ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u) \sin \tilde{\psi} - (\ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v) \cos \tilde{\psi}] \cos \tilde{\varphi} = 0, \\ l_2 &= (\ddot{\beta} + h_2 \dot{\beta}) R_\rho^2 + R_g^2 \frac{\sin^2 \tilde{\varphi}}{\cos \tilde{\varphi}} \beta - \\ &\quad - [(\ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u) \cos \tilde{\psi} + (\ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v) \sin \tilde{\psi}] \sin \tilde{\varphi} = 0, \\ l_3 &= \ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u + H(\dot{u} - R_\omega v) + u - R_m \left[\ddot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha \right] \cos \tilde{\varphi} - 2R_\omega \dot{\beta} \sin \tilde{\varphi} \sin \tilde{\psi} + \\ &\quad + \left[\ddot{\beta} - R_\omega^2 \beta \right] \sin \tilde{\varphi} + 2R_\omega \dot{\alpha} \cos \tilde{\varphi} \cos \tilde{\psi} = 0, \\ l_4 &= \ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v + H(\dot{v} + R_\omega u) + v + R_m \left[\ddot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha \right] \cos \tilde{\varphi} - 2R_\omega \dot{\beta} \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\psi} - \\ &\quad - \left[\ddot{\beta} - R_\omega^2 \beta \right] \sin \tilde{\varphi} + 2R_\omega \dot{\alpha} \cos \tilde{\varphi} \sin \tilde{\psi} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Вводимо нові комплексні змінні

$$X = (u - iv)e^{-i\tilde{\psi}}, \quad Y = \bar{X}, \quad \Phi = i(\alpha \cos \tilde{\varphi} + i\beta \sin \tilde{\varphi}), \quad F = \bar{\Phi}. \quad (15)$$

Перетворюємо ліві частини рівнянь (14) за формулами

$$\begin{aligned} L_1 &= (l_3 + il_4)e^{-i\tilde{\psi}}, \quad L_2 = (l_3 - il_4)e^{i\tilde{\psi}}, \quad L_3 = 2i(p_1 + ip_2)e^{i\tilde{\psi}}, \quad L_4 = -2i(p_1 - ip_2)e^{-i\tilde{\psi}}, \\ p_1 &= l_1 \frac{\cos \tilde{\psi}}{\cos \tilde{\varphi}} + l_2 \frac{\sin \tilde{\psi}}{\sin \tilde{\varphi}}, \quad p_2 = -l_1 \frac{\sin \tilde{\psi}}{\cos \tilde{\varphi}} + l_2 \frac{\cos \tilde{\psi}}{\sin \tilde{\varphi}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Тоді рівняння першого наближення приймуть вид:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \ddot{X} + 2iR_\omega \dot{X} - R_\omega^2 X + H(\dot{X} + iR_\omega X) + X + R_m(\ddot{\Phi} + 2iR_\omega \dot{\Phi} - R_\omega^2 \Phi) = 0, \\
 L_2 &= \ddot{Y} - 2iR_\omega \dot{Y} - R_\omega^2 Y + H(\dot{Y} - iR_\omega Y) + Y + R_m(\ddot{F} - 2iR_\omega \dot{F} - R_\omega^2 F) = 0, \\
 L_3 &= 2\left(\ddot{\Phi} + 2iR_\omega \dot{\Phi} - R_\omega^2 \Phi\right) + \\
 &+ \left(\ddot{\Phi} + h_1 \dot{\Phi} + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} \Phi\right) \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + \left(\ddot{\Phi} + h_2 \dot{\Phi} \tilde{R}_p^2 + R_g^2 \frac{\sin^2 \tilde{\varphi}}{\cos \tilde{\varphi}} \Phi\right) \frac{1}{\sin^2 \tilde{\varphi}} - \\
 &- \left(\ddot{F} + h_1 \dot{F} + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} F\right) \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + \left(\ddot{F} + h_2 \dot{F} \tilde{R}_p^2 + R_g^2 \frac{\sin^2 \tilde{\varphi}}{\cos \tilde{\varphi}} F\right) \frac{1}{\sin^2 \tilde{\varphi}} = 0 \\
 L_4 &= 2\left(\ddot{\Phi} - 2iR_\omega \dot{\Phi} - R_\omega^2 \Phi\right) + \\
 &- \left(\ddot{\Phi} + h_1 \dot{\Phi} + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} \Phi\right) \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + \left(\ddot{\Phi} + h_2 \dot{\Phi} \tilde{R}_p^2 + R_g^2 \frac{\sin^2 \tilde{\varphi}}{\cos \tilde{\varphi}} \Phi\right) \frac{1}{\sin^2 \tilde{\varphi}} + \\
 &+ \left(\ddot{F} + h_1 \dot{F} + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} F\right) \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}} + \left(\ddot{F} + h_2 \dot{F} \tilde{R}_p^2 + R_g^2 \frac{\sin^2 \tilde{\varphi}}{\cos \tilde{\varphi}} F\right) \frac{1}{\sin^2 \tilde{\varphi}} = 0. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Введемо коефіцієнти

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2, \\
 a_{33} &= \left[\ddot{\Phi} + h_2 \dot{\Phi} \tilde{R}_p^2 + R_g^2 \frac{\sin^2 \tilde{\varphi}}{\cos \tilde{\varphi}}\right] \frac{1}{\sin^2 \tilde{\varphi}}, \quad a_{44} = \left[\lambda^2 + h_1 \lambda + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}}\right] \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Тоді характеристичне рівняння прийме вид

$$4a_{11}\bar{a}_{11}a_{33}a_{44} - 2R_m(a_{33} + a_{44})(a_{11}\bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11}a_{13}^2) + 4R_m^2a_{13}^2\bar{a}_{13}^2 = 0. \quad (19)$$

Тут знак спряження над a_{ij} до λ не відноситься.

Досліджуємо стійкість усталених рухів у випадку, коли маса АТТ набагато менше маси ротора:

$$R_m \ll 1. \quad (20)$$

У нульовому наближенні характеристичне рівняння (19) приймає вид

$$4a_{11}\bar{a}_{11}a_{33}a_{44} = 0. \quad (21)$$

Його корені

$$\begin{aligned}
 \lambda_0^{(1/2)} &= -\frac{H}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega, \quad \lambda_0^{(3/4)} = -\frac{H}{2} \mp i\sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + iR_\omega, \\
 \lambda_0^{(5/6)} &= -\frac{h_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 - \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}}}, \quad \lambda_0^{(7/8)} = -\frac{h_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 - \frac{R_g^2 \sin^2 \tilde{\varphi}}{R_p^2 \cos \tilde{\varphi}}}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

З (22) видно, що в нульовому наближенні стійкість або нестійкість руху визначають корені 5-8. Вони будуть мати від'ємні дійсні частини, якщо

$$\cos \tilde{\varphi} > 0, \quad |\tilde{\varphi}| < \pi/2. \quad (23)$$

З цього випливає, що асимптотично стійкими можуть бути тільки ті усталені рухи, у яких центр мас АТТ нижче точки підвісу.

4.2. Для усталених рухів другої групи вводимо збурений рух

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \alpha, \quad \psi = \tilde{\psi} + \beta, \quad \xi = \tilde{\xi} + u, \quad \eta = \tilde{\eta} + v. \quad (24)$$

Тоді рівняння першого наближення приймуть вид

$$\begin{aligned} l_1 &= \ddot{\alpha} + h_1 \dot{\alpha} \pm R_g^2 \alpha \pm R_\omega^2 (\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi}) \beta \mp \\ &\mp [(\ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u) \sin \tilde{\psi} - (\ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v) \cos \tilde{\psi}] = 0, \\ l_2 &= (\ddot{\beta} + h_2 \dot{\beta}) R_p^2 \pm R_\omega^2 (\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi}) \alpha = 0, \\ l_3 &= \ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u + H(\dot{u} - R_\omega v) + u \mp R_m [\ddot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha] \sin \tilde{\psi} + 2R_\omega \dot{\alpha} \cos \tilde{\psi} \mp 0, \\ l_4 &= \ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v + H(\dot{v} + R_\omega u) + v \pm R_m [\ddot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha] \cos \tilde{\psi} - 2R_\omega \dot{\alpha} \sin \tilde{\psi} \mp 0, \end{aligned} \quad (25)$$

де верхній знак відповідає руху $\tilde{\varphi}_5$, а нижній - $\tilde{\varphi}_6$. Зауважимо, що

$$\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi} = (\pm) \tilde{r} = (\pm) \frac{R_m R_\omega^2 e_0}{\sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2}}, \quad (26)$$

де (\pm) - означає невизначений знак, не зв'язаний із номером усталеного руху. Вводимо комплексні змінні

$$X = -i(u + iv)e^{-i\tilde{\psi}}, \quad Y = \bar{X}. \quad (27)$$

Тоді система рівнянь (25) перетворюється до виду

$$\begin{aligned} l_1 &= \ddot{\alpha} + h_1 \dot{\alpha} \pm R_g^2 \alpha \pm (\pm) \tilde{r} R_\omega^2 \beta \pm \frac{1}{2} [\ddot{X} + 2iR_\omega \dot{X} - R_\omega^2 X + \ddot{Y} - 2iR_\omega \dot{Y} - R_\omega^2 Y] = 0, \\ l_2 &= (\ddot{\beta} + h_2 \dot{\beta}) R_p^2 \pm (\pm) \tilde{r} R_\omega^2 \alpha = 0, \\ -i(l_3 + il_4)e^{-i\tilde{\psi}} &= \ddot{X} + 2iR_\omega \dot{X} - R_\omega^2 X + H(\dot{X} + iR_\omega X) + X \pm \\ &\pm R_m (\ddot{\alpha} + 2iR_\omega \dot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha) = 0, \\ i(l_3 - il_4)e^{i\tilde{\psi}} &= \ddot{Y} - 2iR_\omega \dot{Y} - R_\omega^2 Y + H(\dot{Y} - iR_\omega Y) + Y \pm R_m (\ddot{\alpha} - 2iR_\omega \dot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Введемо коефіцієнти

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2, \quad a_{33} = \lambda^2 + h_1 \lambda \pm R_g^2, \\ a_{34} &= \frac{R_\omega^4 e_0}{\sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2}}, \quad a_{44} = (\lambda^2 + h_2 \lambda) R_p^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Тоді характеристичне рівняння прийме вид

$$a_{11} \bar{a}_{11} a_{33} a_{44} - \frac{R_m}{2} (a_{11} \bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11} a_{13}^2) a_{44} - R_m^2 a_{11} \bar{a}_{11} a_{34}^2 = 0. \quad (30)$$

Тут знак спряження над a_{ij} до λ не відноситься.

У нульовому наближенні характеристичне рівняння (30) приймає вид

$$a_{11} \bar{a}_{11} a_{33} a_{44} = 0. \quad (31)$$

Його корені

$$\lambda_0^{(1/2)} = -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega, \quad \lambda_0^{(3/4)} = -\frac{H}{2} \mp i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + iR_\omega,$$

$$\lambda_0^{(5)} = -\frac{h_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 \mp R_g^2}, \quad \lambda_0^{(6)} = -\frac{h_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 \mp R_g^2}, \quad \lambda_0^{(7)} = -h_2, \quad \lambda_0^{(8)} = 0. \quad (32)$$

Таким чином, у нульовому наближенні у системи один нульовий корінь $\lambda^{(8)}$. Інші корені будуть мати від'ємні дійсні частини тільки для руху $\tilde{\varphi}_5$, у якому центр мас АТТ під точкою підвісу. Наступне наближення нульового кореня

$$\lambda^{(8)} = \lambda_2^{(8)} R_m^2 + \dots = \frac{R_\omega^8 e_0^2 R_m^2}{[R_\omega^2 - 1]^2 + H^2 R_\omega^2 R_p^2 R_g^2 h_2} + \dots \quad (33)$$

З додатності кореня випливає, що побічний рух $\tilde{\varphi}_5$ також завжди нестійкий.

5. Остаточно можна зробити наступні висновки про стійкість усталених рухів системи у випадку, коли маса АТТ набагато менше маси ротора і його ємності вистачає для зрівноваження ротора:

1) на малих швидкостях обертання ротора ($R_\omega \sim +0$) єдиний асимптотично стійкий - побічний рух $\tilde{\varphi}_3$, у якому АТТ відхилено в більш важкий бік ротора;

2) із наближенням швидкості обертання ротора до резонансної частоти ($R_\omega \sim 1-0$) асимптотично стійкий - основний рух $\tilde{\varphi}_1$, у якому ротор зрівноважений і центр мас АТТ нижче точки підвісу, і побічні рухи $\tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_4$ (за умови існування), у яких АТТ відхилено в більш важкий або легкий бік ротора;

3) на зарезонансних швидкостях обертання ротора ($R_\omega > 1$) єдиний асимптотично стійкий - основний рух $\tilde{\varphi}_1$.

Література

1. Гусаров А.А., Сусанин В.И. и др. Автоматическая балансировка роторов машин. М.: "Наука", 1979, 151 с.
2. Філімоніхін Г.Б. Про зрівноваження ротора маятниками, насадженими на осі, що перпендикулярні валу // Доп. НАН України. -2000. -№6. - С.66-70.
3. Филимоных Г.Б. Условия уравновешивания ротора абсолютно твердым телом с неподвижной точкой на оси вала // Доп. НАН України. -2001. -№1. -С. 65-69.
4. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. -К.: Наук. думка, 1991. -168 с.
5. Найфэ А. Введение в методы возмущений. - М.: Мир, 1984. - 535 с.

Надійшла до редакції 27.03.2001